Početní část 2 - 1.2.2021

3. Označme integrál v zadání I. Volíme substituci $y = \sqrt{\frac{x+1}{x+4}}$, odsud spočteme

$$x = \frac{4y^2 - 1}{1 - y^2}, \quad dx = \frac{6y}{(1-y^2)^2} dy,$$

takže integrál se převádí na

$$\int \frac{1-y^2}{4y^2-1} \cdot y \cdot \frac{6y}{(1-y^2)^2} dy = \int \frac{6y^2}{(4y^2-1)(1-y^2)} dy =: \int g(y) dy.$$

Integrand $g(y)$ rozložíme na parciální zlomky s lineárními jmenovateli, takže jejich čitatele stačí určit zakrývací metodou, vyjde

$$g(y) = \frac{1}{2y-1} - \frac{1}{2y+1} + \frac{1}{y+1} - \frac{1}{y-1},$$

a tedy

$$\int g(y) dy = \frac{1}{2} \log|2y-1| - \frac{1}{2} \log|2y+1| + \log|y+1| - \log|y-1| + C$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2} \log\left|2\sqrt{\frac{x+1}{x+4}} - 1\right| - \frac{1}{2} \log\left|2\sqrt{\frac{x+1}{x+4}} + 1\right| + \log\left|\sqrt{\frac{x+1}{x+4}} + 1\right| - \log\left|\sqrt{\frac{x+1}{x+4}} - 1\right| + C}$$

Tato funkce je primitivní funkcí k zadané na $(-\infty, -4)$, $(-1, 0)$ a $(0, +\infty)$, tedy „všude“.

4. (a) Ze vzorce pro Taylorův polynom 3. stupně pro funkci $\sin y$ odvodíme vztahy

$$\sin(2x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3),$$
$$\sin(3x) = 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3).$$

(b) Derivováním odvodíme vztahy

$$\sqrt{y} = 1 + \frac{1}{2}(y-1) - \frac{1}{8}(y-1)^2 + \frac{1}{16}(y-1)^3 + o((y-1)^3),$$
$$\sqrt[3]{y} = 1 + \frac{1}{3}(y-1) - \frac{1}{9}(y-1)^2 + \frac{5}{81}(y-1)^3 + o((y-1)^3).$$

(c) Dosazením a úpravou pak získáme

$$\sqrt{1+\sin(2x)} = \boxed{1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3} + o(x^3),$$
$$\sqrt[3]{1+\sin(3x)} = \boxed{1 + x - x^2 + \frac{1}{6}x^3} + o(x^3).$$

(d) Také víme (nebo si spočítáme z definice)

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$$
$$\log(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

Celkem tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin(2x)} - \sqrt[3]{1+\sin(3x)}}{x(\log(1+x) - \log(1-x))} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3) - (1 + x - x^2 + \frac{1}{6}x^3) + o(x^3)}{x((x - \frac{1}{2}x^2) - (-x - \frac{1}{2}x^2) + o(x^2))} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{2x^2 + o(x^2)} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$